

ALGORITM - Cărțile de matematică și informatică

1.1.	Multiplii și divizorii numărului natural	1
1.2.	Forme de exprimare a numărului natural	2
1.3.	Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor	3
	Controll	19
	Teste de evaluare	20
	Fisi pentru protocol individual	21
1.4.	Adunarea și scăderea numerelor naturale	22
1.5.	Împărțirea numerelor naturale	23
1.6.	Potențială și radicală a unui număr natural	24
1.7.	Cercetarea cărții	25
	Teste de evaluare	26
	Fisi pentru protocol individual	27
1.8.	Ecuție cu coeficienți rationale	28
1.9.	Probleme care se rezolvă cu ecuații	29
	Teste de evaluare	30
	Fisi pentru protocol individual	31
1.10.	Probleme cu caracter aplicațional	32
	Teste de evaluare	33
	Fisi pentru protocol individual	34
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	35
	Teste de evaluare	36
	Fisi pentru protocol individual	37
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	38
	Teste de evaluare	39
	Fisi pentru protocol individual	40
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	41
	Teste de evaluare	42
	Fisi pentru protocol individual	43
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	44
	Teste de evaluare	45
	Fisi pentru protocol individual	46
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	47
	Teste de evaluare	48
	Fisi pentru protocol individual	49
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	50
	Teste de evaluare	51
	Fisi pentru protocol individual	52
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	53
	Teste de evaluare	54
	Fisi pentru protocol individual	55
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	56
	Teste de evaluare	57
	Fisi pentru protocol individual	58
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	59
	Teste de evaluare	60
	Fisi pentru protocol individual	61
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	62
	Teste de evaluare	63
	Fisi pentru protocol individual	64
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	65
	Teste de evaluare	66
	Fisi pentru protocol individual	67
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	68
	Teste de evaluare	69
	Fisi pentru protocol individual	70

Matematică

clasa a VII-a

I

2.1.	Rădăcina patră a unui număr natural perfect	71
2.2.	Rădăcina pătrată a unui număr real pozitiv	72
2.3.	Multiplii numerelor reale. Modulul unui număr real	73
	Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă	74
	Teste de evaluare	75
	Fisi pentru protocol individual	76
2.4.	Reculii de calcul cu radicală	77
2.5.	Aproximarea și rădăcina numărului irational	78
	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale	79
	Potenții cu exponent întreg	80
2.6.	Rationalizarea numerelor irationale	81
2.7.	Media geometrică	82
	Teste de evaluare	83
	Fisi pentru protocol individual	84
2.8.	Probleme cu caracter aplicațional	85
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	86
	Teste de evaluare	87
	Fisi pentru protocol individual	88
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	89
	Teste de evaluare	90
	Fisi pentru protocol individual	91
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	92
	Teste de evaluare	93
	Fisi pentru protocol individual	94
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	95
	Teste de evaluare	96
	Fisi pentru protocol individual	97
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	98
	Teste de evaluare	99
	Fisi pentru protocol individual	100
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	101
	Teste de evaluare	102
	Fisi pentru protocol individual	103
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	104
	Teste de evaluare	105
	Fisi pentru protocol individual	106
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	107
	Teste de evaluare	108
	Fisi pentru protocol individual	109
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	110
	Teste de evaluare	111
	Fisi pentru protocol individual	112
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	113
	Teste de evaluare	114
	Fisi pentru protocol individual	115
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	116
	Teste de evaluare	117
	Fisi pentru protocol individual	118
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	119
	Teste de evaluare	120
	Fisi pentru protocol individual	121
	Probleme pentru performanță scură și olimpică	122
	Teste de evaluare	123
	Fisi pentru protocol individual	124

CUPRINS

ALGEBRĂ Capitolul 1. Numere raționale

1.1.	Mulțimea numerelor raționale.	2
	Forme de scriere a numerelor raționale.....	7
1.2.	Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.	3
	Compararea numerelor raționale	13
	Teste de evaluare	19
	Fișă pentru protofoliul individual (A1)	21
1.3.	Adunarea și scăderea numerelor raționale.....	23
1.4.	Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	31
1.5.	Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional	38
1.6.	Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale	44
	Teste de evaluare	51
	Fișă pentru protofoliul individual (A2)	53
1.7.	Ecuații cu coeficienți raționali	55
1.8.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	60
	Teste de evaluare	64
	Fișă pentru protofoliul individual (A3)	67
1.9.	Probleme cu caracter aplicativ.....	69
1.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	70

ALGEBRĂ Capitolul 2. Numere reale

2.1.	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	75
2.2.	Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv	79
2.3.	Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă	82
	Teste de evaluare	87
	Fișă pentru protofoliul individual (A4)	89
2.4.	Reguli de calcul cu radicali	91
2.5.	Adunarea și scăderea numerelor reale	96
2.6.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor	100
2.7.	Raționalizarea numitorului	109
2.8.	Media geometrică	118
	Teste de evaluare	120
	Fișă pentru protofoliul individual (A5)	121
2.9.	Probleme cu caracter aplicativ	123
2.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	124

GEOMETRIE Capitolul 3. Patrulatere

3.1.	Patrulater convex	129
3.2.	Paralelogramul	131
3.3.	Linia mijlocie în triunghi	135
	Teste de evaluare	139
	Fișă pentru protofoliul individual (G1)	141
3.4.	Dreptunghiul	143
3.5.	Rombul	147
3.6.	Pătratul	150
3.7.	Trapezul	153
3.8.	Centrul de simetrie și axele de simetrie pentru poligoanele studiate (extindere)	157
	Teste de evaluare	159
	Fișă pentru protofoliul individual (G2)	161
3.9.	Ariile figurilor geometrice	163
	Teste de evaluare	169
	Fișă pentru protofoliul individual (G3)	171
3.10.	Probleme cu caracter aplicativ.....	173
3.11.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	175

GEOMETRIE Capitolul 4. Asemănarea triunghiurilor

4.1.	Raportul a două segmente	181
4.2.	Teorema lui Thales	184
	Teste de evaluare	191
	Fișă pentru protofoliul individual (G4)	193
4.3.	Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	195
4.4.	Criterii de asemănare a triunghiurilor	200
	Teste de evaluare	205
	Fișă pentru protofoliul individual (G5)	207
4.5.	Probleme cu caracter aplicativ	209
4.6.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	211

SINTEZE Capitolul 5. Variante de subiecte pentru teză 215

Soluții	219
----------------------	-----

NUMERE RAȚIONALE

Tema 1.1. Mulțimea numerelor raționale.

Forme de scriere a numerelor raționale

Tema 1.2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Compararea numerelor raționale

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.3. Adunarea și scăderea numerelor raționale

Tema 1.4. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale

Tema 1.5. Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional

Tema 1.6. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.7. Ecuații cu coeficienți raționali

Tema 1.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.9. Probleme cu caracter aplicativ

Tema 1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Tema 1.1

Mulțimea numerelor raționale.

Forme de scriere a numerelor raționale

Număr rațional. Un număr x se numește *număr rațional* dacă există o pereche de numere întregi (a, b) cu $b \neq 0$, astfel încât $x = \frac{a}{b}$. Mulțimea numerelor raționale se

notează cu \mathbb{Q} și poate fi definită astfel: $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}$.

Observații. 1. Are loc inclusiunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule*.

3. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$, unde \mathbb{Q}_+ reprezintă mulțimea numerelor raționale pozitive, iar \mathbb{Q}_- mulțimea numerelor raționale negative.

Forme de scriere a numerelor raționale

Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică*.

Teoremă. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Transformarea fractiilor ordinare în fractii zecimale

Un număr rațional pozitiv reprezentat printr-o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$, se transformă, folosind algoritmul de împărțire a numerelor naturale, în:

a. fracție zecimală finită dacă descompunerea lui b în produs de factori primi conține numai factorii 2 sau 5.

b. fracție periodică simplă dacă descompunerea lui b în produs de factori primi nu conține nici factorul prim 2, nici factorul prim 5.

c. fracție periodică mixtă dacă descompunerea lui b conține cel puțin unul din factorii primi 2 și 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 și de 5.

Exemple.

a. fracții zecimale finite: $\frac{37}{8} = \frac{37}{2^3} = 4,625$; $\frac{187}{50} = \frac{187}{2 \cdot 5^2} = 3,74$;

b. fracții zecimale periodice simple: $\frac{138}{9} = \frac{138}{3^2} = 15,(3)$; $\frac{67}{33} = \frac{67}{3 \cdot 11} = 2,(03)$;

c. fracții zecimale periodice mixte: $\frac{1}{55} = \frac{1}{5 \cdot 11} = 0,0(18)$; $\frac{503}{12} = \frac{503}{2^2 \cdot 3} = 41,9(6)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

a. transformarea fracțiilor zecimale finite în fracții ordinare:

$$\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n} = \frac{\overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n}$$

b. transformarea fracțiilor zecimale periodice simple în fracții ordinare:

$$\overline{a_0, (a_1 a_2 \dots a_p)} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_p}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}}} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_p}}{999 \dots 9}$$

c. transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte în fracții ordinare:

$$\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_p)} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_p} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ cifre}}}$$

Exemple. a. $15,34 = 15 \frac{34}{100} = \frac{1534}{100}$; b. $0,8 = \frac{8}{10}$; c. $6,534 = \frac{6534}{1000}$.

b. $0,(17) = \frac{17}{99}$; d. $5,(8) = 5 \frac{8}{9}$; e. $403,(295) = 403 \frac{295}{999}$.

c. $2,5(13) = 2 \frac{513 - 5}{990} = 2 \frac{508}{990}$; f. $0,27(568) = \frac{27568 - 27}{99900} = \frac{27541}{99900}$



1. Scrieți trei exemple de numere:

a) naturale; b) întregi negative; c) raționale, care nu sunt întregi.

2. Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a) $-3 \in \mathbb{Q}$; b) $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}$; c) $\frac{11}{3} \in \mathbb{Z}$; d) $-\frac{6}{3} \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{9}{11} \notin \mathbb{Z}$;

f) $-\frac{5}{8} \in \mathbb{Q}_-$; g) $-41 \in \mathbb{N}$; h) $23 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; i) $-\frac{5}{11} \notin \mathbb{Q}_+$; j) $-\frac{5}{11} \in \mathbb{Q}$.

3. Determinați elementele mulțimii: $C = \left\{ x = \frac{a}{b} \mid a \in \{-2, 1, 3\} \text{ și } b \in \{-4, 0, 5\} \right\}$.

4. Fie $M = \left\{ -9; 23; \frac{5}{7}; -\frac{13}{4}; 0; -11; 105; \frac{1}{6}; \frac{29}{14}; -18 \right\}$. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$; $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}_+\}$;

$D = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Z}\}$; $E = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}^*\}$; $F = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;

$G = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}_-\}$; $H = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$; $I = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}$.

Rezolvare. $C = \left\{ 23; \frac{5}{7}; 105; \frac{1}{6}; \frac{29}{14}; 0 \right\}; \quad G = \left\{ -9; -\frac{13}{4}; -11; -18 \right\}.$

5. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, eventual amplificându-le convenabil:

$$a) \frac{1}{5}; \quad b) \frac{2}{10}; \quad c) \frac{153}{10}; \quad d) \frac{77}{25}; \quad e) \frac{31}{4}; \\ f) \frac{5947}{100}; \quad g) \frac{23857}{1000}; \quad h) \frac{7}{125}; \quad i) \frac{2001}{16}; \quad j) \frac{212}{625}.$$

Rezolvare. $d) \frac{77}{25} \stackrel{(4)}{=} \frac{308}{100} = 3,08.$

6. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, eventual simplificându-le convenabil:

$$a) \frac{28}{20}; \quad b) \frac{18}{10}; \quad c) \frac{35}{50}; \quad d) \frac{128}{200}; \quad e) \frac{150}{60}; \\ f) \frac{36}{400}; \quad g) \frac{180}{90}; \quad h) \frac{12}{30}; \quad i) \frac{56}{700}; \quad j) \frac{375}{1250}.$$

Rezolvare. $e) \frac{150}{60} \stackrel{(6)}{=} \frac{25}{10} = 2,5.$

7. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

$$a) \frac{2}{3}; \quad b) \frac{3}{7}; \quad c) \frac{5}{11}; \quad d) \frac{237}{9}; \quad e) \frac{51}{13}; \\ f) \frac{27}{11}; \quad g) \frac{700}{37}; \quad h) \frac{507}{33}; \quad i) \frac{40}{101}; \quad j) \frac{40}{41}.$$

Rezolvare. b) Împărțim numărătorul la numitor:

$$3 : 7 = 0,428571428571\dots, \text{ deci } \frac{3}{7} = 0,(428571).$$

8. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

$$a) \frac{1}{6}; \quad b) \frac{23}{15}; \quad c) \frac{14}{55}; \quad d) \frac{304}{75}; \quad e) \frac{83}{12}; \\ f) \frac{871}{60}; \quad g) \frac{13}{14}; \quad h) \frac{18}{55}; \quad i) \frac{101}{35}; \quad j) \frac{35}{24}.$$

9. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

$$a) 0,14; \quad b) 5,7; \quad c) 39,183; \quad d) 51,51; \quad e) 34,007; \\ f) 296,8; \quad g) 8,301; \quad h) 0,0018; \quad i) 0,003001; \quad j) 1,234.$$

Rezolvare. i) $0,003001 = \frac{3001}{10^6} = \frac{3001}{1000000}.$

10. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

$$a) 0,(5); \quad b) 13,(7); \quad c) 5,(31); \quad d) 102,(703); \quad e) 81,(54); \\ f) 14,(8); \quad g) 0,(07); \quad h) 0,(0012); \quad i) 3,(14); \quad j) 1,(234).$$

Rezolvare. f) $14,(8) = 14\frac{8}{9} = \frac{134}{9}.$

$$h) 0,(0012) = \frac{12}{9999} .$$

11. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

- a) 0,0(5); b) 2,1(24); c) 0,12(5); d) 103,8(203); e) 54,5(43);
 f) 7,2(140); g) 5,1(5); h) 5,10(5); i) 8,51(3070); j) 1,2(34).

Rezolvare. i) $8,51(3070) = 8 \frac{513070 - 51}{999900} = \dots$



12. Folosind descompunerea în factori primi a numitorului, stabiliți în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau periodică mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:

- a) $\frac{4}{49}$; b) $\frac{5}{98}$; c) $\frac{121}{32}$; d) $\frac{345}{14}$; e) $\frac{14}{135}$;
 f) $\frac{7}{66}$; g) $\frac{1}{125}$; h) $\frac{3}{85}$; i) $\frac{2}{207}$; j) $\frac{10001}{606}$.

Rezolvare. f) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. Descompunerea în factori primi a numitorului conține, factorul prim 2 (deci cel puțin unul dintre factorii primi 2 și 5), și factorii primi 3 și 11 (deci cel puțin un factor prim diferit de 2 și de 5). Prin urmare, fracția ordinara dată se va transforma în fracție zecimală periodică mixtă.

13. Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

- a) $\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{12}{n+1} \in \mathbb{N}$; c) $\frac{15}{3n+1} \in \mathbb{N}$; d) $\frac{18}{2n-1} \in \mathbb{Z}$;
 e) $\frac{13}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; f) $\frac{9n+14}{3n+1} \in \mathbb{Z}$; g) $\frac{5n-2}{2n+3} \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{17n-25}{5n+7} \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare. c) $\frac{15}{3n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3n+1 \in D_{15} \Leftrightarrow \dots$

f) $\frac{9n+14}{3n+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3n+1 | 9n+14$
 ...
 Dar $3n+1 | 3n+1 \cdot 3$

14. Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{8}{n+1}$ este:

- a) supraunitară; b) ireductibilă; c) reductibilă;
 d) zecimală finită; e) periodică simplă; f) periodică mixtă.

15. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

- a) „Orice număr natural este număr întreg.”
 b) „Orice număr întreg este număr rațional.”
 c) „Orice număr întreg este număr natural.”
 d) „Dacă un număr este rațional, atunci numărul este întreg.”
 e) „Dacă un număr nu este întreg, atunci numărul nu este natural.”

Rezolvare. c) Fals. Contraexemplu: $-3 \in \mathbb{Z}$, dar $-3 \notin \mathbb{N}$.

- 16.** Se consideră numerele: $a = 15,124$, $b = 28,(62)$ și $c = 1,2(175)$.
- Determinați a 3-a cifră după virgulă a fiecărui număr de mai sus;
 - Determinați a 30-a cifră după virgulă a fiecărui număr de mai sus;
 - Determinați suma primelor 100 zecimale ale fiecărui număr de mai sus.
- 17. a)** Determinați a 70-a și a 90-a cifră după virgulă a numărului $3,24531(4596)$.
- b)** Un număr rațional este reprezentat printr-o fracție zecimală periodică mixtă. Partea zecimală neperiodică are 5 cifre, iar perioada este formată din 4 cifre. Arătați că a 70-a și a 90-a cifră de la partea zecimală sunt egale.
- Rezolvare. b)** Cum $70 - 5 = 65$ și $65 : 4 = 16$ rest 1, a 70-a zecimală este prima cifră a părții periodice. Continuați voi!
- 18. a)** Determinați cifra x , știind că $\overline{0,x(15)} = \frac{71}{330}$.
- b)** Determinați cifrele x, y pentru care are loc egalitatea $\overline{2,(3xy1)} = \frac{241}{101}$.
- c)** Determinați cifrele x, y, z pentru care are loc egalitatea $\overline{0,x8(y4z)} = \frac{27}{148}$.
- 19.** Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:
- $\frac{n}{n+1}$;
 - $\frac{n+1}{2n+3}$;
 - $\frac{3n-5}{4n-7}$;
 - $\frac{6n+7}{7n+8}$.
- Rezolvare. a)** Fie $d \in \mathbb{N}^*$ un divizor comun al numerelor n și $n+1$. Cum $d|n$ și $d|n+1$, rezultă că $d|n+1-n$...
- 20. a)** Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+1}{n+3}$ este reductibilă.
- b)** Determinați suma celor mai mici 100 numerele naturale nenule n pentru care fracția $\frac{n+1}{n+3}$ este reductibilă.
- Rezolvare. a)** Dacă fracția dată se simplifică prin numărul natural d , atunci $d|n+1$ și $d|n+3$, deci $d|...$
- 21.** Determinați cifrele a, b, c diferite de 9, astfel încât $a+c=2b$ și pentru care are loc egalitatea $\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} = 13,(3)$.
- Indicație.** $\overline{a,b(c)} = a\frac{\overline{bc}-b}{90} = a + \frac{10b+c-b}{90} = \dots$
- 22.** Determinați cifrele a și b în baza zece pentru care are loc egalitatea $\frac{a}{b} = \overline{b,a}$.
- 23.** Aflați numărul \overline{abc} , știind că: $\frac{\overline{abc}}{29} = \frac{\overline{bca}}{68} = \frac{\overline{cab}}{14}$.
- Indicație.** $\frac{\overline{abc}}{29} = \frac{\overline{bca}}{68} = \frac{\overline{cab}}{14} = \frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{29 + 68 + 14} = \dots$



- 24.** Se consideră numărul $N = \frac{\overline{abc} + 91}{\overline{abc} - 10}$. Calculați $a+b+c$, știind că $N \in \mathbb{N}$.

Indicație. Scriem numărul N în felul următor:

$$N = \frac{\overline{abc} + 91}{\overline{abc} - 10} = \frac{\overline{abc} - 10 + 101}{\overline{abc} - 10} = 1 + \frac{101}{\overline{abc} - 10}.$$

Cum $N \in \mathbb{N}$, rezultă că $\overline{abc} - 10 \mid 101$.

- 25.** Fie $S = \overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)}$, unde a, b, c sunt cifre nenule ale sistemului zecimal, invers proporționale cu $\frac{1}{1+bc}, \frac{1}{1+ca}, \frac{1}{1+ab}$. Determinați a, b, c știind că S este un număr natural.

- 26.** Se dau mulțimile $A = \left\{ x \mid x = \frac{2m-1}{2m-3}, m \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ x \mid x = \frac{3p+1}{3p-2}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.

- 27.** Fie p un număr prim pentru care $p+2$ este număr prim, mai mic decât 30. Se știe că există numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$, astfel încât să aibă loc relația $\frac{p+2}{p} = 1 + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}$.

a) Demonstrați că $y = 2$.

b) Câte triplete (p, x, y) verifică condițiile date?

Probleme de șapte stele

- 28.** Fie $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $x = bc + \frac{1}{a}$, $y = ca + \frac{1}{b}$, $z = ab + \frac{1}{c}$ și $ax + by + cz = 1$. Arătați că $xyz < 0$.
- 29.** Arătați că mulțimea $A = \left\{ \frac{993}{2}, \frac{994}{3}, \frac{995}{4}, \dots \right\}$ conține un singur număr natural.
- 30.** Fie $A = \frac{(3x+y)(z-x)(2x+2y+z)(3x+3z-x)}{210}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$, astfel încât $17x + 5y - 2z = 0$. Demonstrați că A este un număr natural pătrat perfect.

Testul 2

(3p) 1. Transformați în fracții zecimale: a) $\frac{17}{10}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{19}{12}$.

(2p) 2. Comparați numerele:

a) $\frac{4}{3}$ și $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{5}$ și $\frac{2}{7}$; c) $-0,5$ și $-0,15$; d) $-\frac{2}{3}$ și $-0,66$.

(1p) 3. Determinați $x \in \mathbb{Q}$ pentru care $|x| = 0,(5)$.

(1p) 4. Scrieți partea întreagă și partea fracționară a numărului $-\frac{3}{4}$.

(1p) 5. Determinați a 2013-a zecimală a numărului $3,(5613)$.

(1p) 6. Arătați că $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} > 0,08$.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1. Determinați opusul și modulul următoarelor numere raționale:

a) $\frac{7}{9}$; b) $-2,(4)$; c) 0.

(2p) 2. Comparați numerele:

a) 0 și $\frac{2}{9}$; b) $\frac{13}{12}$ și $\frac{14}{13}$; c) $-0,(5)$ și $-0,(51)$; d) $-\frac{3}{4}$ și $-\left|\frac{3}{4}\right|$.

(1p) 3. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{3}{5} < \frac{n+1}{15} < \frac{4}{3}$.

(1p) 4. Dați un exemplu de număr întreg cuprins între $-\frac{7}{2}$ și $-\frac{5}{4}$.

(1p) 5. Determinați cifrele nenule a și b , în baza zece, astfel încât $\overline{a,b} + \overline{b,a} = 3,3$.

(1p) 6. Arătați că fracția $\frac{n+1}{3n+4}$ este ireductibilă, oricare ar fi numărul natural n .

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.